Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout réel $x \in]0~;~+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$.

1. On note g' la dérivée de g. On a : $g'(x) = \dfrac{2\dfrac{1}{x} \times x - 2\ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2}$
2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$:

x	0		1		e		$+\infty$
Variations de g	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2}{\text{e}}$	↘	0

a. La valeur $\dfrac{2}{\text{e}}$ est l'image de e par f : $f(\text{e}) = \dfrac{2\ln \text{e}}{\text{e}} = \dfrac{2}{\text{e}}$.

b. $g'(x) = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2}$ donc $g'(x)$ est du signe de $2 - 2\ln x = 2(1 - \ln x)$.

- Sur $]0~;~\text{e}[$, $\ln x < 1$ donc $1 - \ln x > 0$ donc $g'(x) > 0$; la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.
- Sur $]\text{e}~;+\infty[$, $\ln x > 1$ donc $1 - \ln x < 0$ donc $g'(x) < 0$; la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle.

c. On justifie les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\ln x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

  Donc, par produit de limites, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\ln x \times \frac{1}{x} = -\infty$.
- D'après le cours, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

3. On en déduit le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
signe de $g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = [\ln(x)]^2$.

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

1. $[(u(x)^2]' = 2u'(x)u(x)$ donc $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = \dfrac{2\ln x}{x} = g(x)$

   Donc sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. **a.** On étudie la convexité de la fonction f.

D'après les questions précédentes, la fonction g, dérivée de la fonction f, est croissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$, donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

De même, la fonction g, dérivée de la fonction f, est décroissante sur $]\,\mathrm{e}\,;+\infty[$, donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

De plus, la fonction g donc la fonction f', change de sens de variation en $x = \mathrm{e}$, donc la courbe représentant la fonction f admet un point d'inflexion en $x = \mathrm{e}$.

b. On étudie les variations de la fonction f en utilisant le signe de $f' = g$.

Sur l'intervalle $]0\,;1[$, la fonction g est négative donc f' est négative ; la fonction f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, la fonction g est positive donc f' est positive ; la fonction f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

De plus on peut dire que la fonction f admet un minimum pour $x = 1$.

3. **a.** Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e est : $y = f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$. On a : $f'(\mathrm{e}) = g(\mathrm{e}) = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$; $f(\mathrm{e}) = (\ln \mathrm{e})^2 = 1$

L'équation devient : $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1$ soit $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 2 + 1$ c'est-à-dire $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 1$.

b. La courbe représentant f admet un point d'inflexion en $x = \mathrm{e}$ donc la tangente en ce point coupe la courbe ; à gauche du point, la fonction est convexe donc la courbe est au dessus de cette tangente.

On en déduit que sur $]0\,;\,\mathrm{e}]$, on a : $[\ln(x)]^2 \geqslant \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 1$.